



مقاله دهم اصول اقلیدس و سیر پیشرفت مفهوم کمیت‌های گنگ از تمدن یونانی تا دوره اسلامی

زهرا پورنجف^۱

چکیده

برای یونانیان «عدد» و «مقدار» دو مفهوم کاملاً جداگانه بود و از این دیدگاه نظریه گنگ بودن، تنها می‌توانست مربوط به مقادیر باشد. آنها راهی برای نوشتن و نشان دادن کمیت‌های گنگ نداشتند و این کمیت‌ها را فقط با یک، یا ترکیبی از چند خط راست نشان می‌دادند. از این رو این بحث برای آنها بخشی از هندسه به حساب می‌آمد و این مطلب را اقلیدس در مقاله دهم اصول که مربوط به کمیت‌های گنگ ساده و مرکب است، مورد بحث قرار داده است. در این مقاله، ابتدا به بررسی تفاوت دو مفهوم «عدد» و «مقدار» در یونان باستان می‌پردازیم و سپس، نگاهی گذرا به تاریخچه پیدایش کمیت‌های گنگ داریم، آن‌گاه بحث کمیت‌های گنگ و دسته‌بندی این کمیت‌ها، در مقاله دهم اصول اقلیدس مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس اشاره‌ای به شرح‌های دوره اسلامی بر مقاله دهم اصول اقلیدس و تلاش دانشمندان این دوره و به خصوص کرجی (قرن ۴ و ۵ ق) برای جبری کردن کمیت‌های گنگ می‌شود.

کلیدواژه‌ها: مقاله دهم اصول اقلیدس، کمیت‌های گنگ، کرجی

مقدمه

جدایی مفهوم «عدد» و «مقدار» در یونان باستان

کارشناسان تاریخ علم نشان داده‌اند که یکی از اصول ذاتی و تفکیک ناپذیر ریاضیات باستان، جدا ساختن کامل دو مفهوم «عدد» و «مقدار» (موضوعی مادی و هندسی) بوده است [۱: ص ۱۲۴]^۲. در فلسفه یونانی، به صورتی که در آثار ارسطو آمده است و تأثیر آن در آثار ریاضی‌دانان یونانی چون اقلیدس و ارشمیدس و

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد تاریخ علم، پژوهشکده تاریخ علم دانشگاه تهران، zpournajaf@yahoo.com

^۲ در این منبع، عمدتاً از ترجمه مقاله ذکر شده در [۱۰] استفاده شده است.



آپولونیوس دیده می‌شود، کمیت‌ها به دو دسته کاملاً متمایز تقسیم می‌شوند: ۱. اعداد، که منظور از آن اعداد طبیعی است؛ ۲. مقادیر، که کمیات هندسی (طول و سطح و حجم) و زمان است. در این تقسیم‌بندی، مفهوم کلی «عدد حقیقی» (شامل اعداد گویا و گنگ) وجود ندارد. اعداد گویا (کسرهای) را به صورت «نسبت»هایی میان اعداد طبیعی تعریف می‌کردند و موجوداتی که امروزه عدد گنگ نامیده می‌شوند، با پاره‌خط و نسبت میان آنها با نسبت میان پاره‌خطها نمایش داده می‌شود [۲]. به طوری که در کتاب اصول اقلیدس، نظریه اعداد و نظریه مقادیر در دو مقاله جداگانه (به ترتیب در مقاله‌های ۷ و ۹ و مقاله ۵) بررسی می‌شود.

از این رو موضوع کمیت‌های گنگ برای یونانیان، بیش از آن چه بخشی از حساب به شمار آید، بخشی از هندسه در نظر گرفته می‌شد چرا که راهی برای نوشتن و نمایش دادن آن وجود نداشت و تنها با یک خط راست یا ترکیبی از خط‌های راست ممکن بود نشان داده شود. این کمیت‌ها، همیشه خط‌های راست گنگ هستند و تمام بحث در این باره جنبه هندسی دارد.

تفاوت بین هندسه (علمی که به مقادیر پیوسته می‌پردازد) و حساب (علم کمیت‌های گسسته) باعث یکی از مشکلات اساسی منطقی شد که ریاضیدان‌ها قرن‌ها با آن روبه‌رو بودند. تنها با یکی کردن دو مفهوم «عدد» و «مقدار» در یک مفهوم عام‌تر برای اعداد حقیقی و گنگ، این مشکل می‌توانست حل شود [۱: ص ۱۲۴].

تاریخچه پیدایش کمیت‌های گنگ

این امر قطعی است که اکتشاف نخستین کمیت گنگ، از طریق کشف نسبت موجود میان قطر و ضلع مربع بوده است، یعنی نخستین کمیت گنگ یا اندازه‌ناپذیری^۳ که می‌باید کشف می‌شد، هم ارز با چیزی بوده است که ما امروزه آن را به صورت $\sqrt{2}$ می‌نویسیم. به دشواری می‌توان کشف این مطلب را به خود فیثاغورس نسبت داد، ولی در این تردیدی نیست که یافتن آن به کمک کارهای مکتب فیثاغورسی صورت گرفته است [۳: ص ۵۴]. تا مدت‌ها $\sqrt{2}$ تنها کمیت^۴ گنگ شناخته شده بود. بعدها، به گفته افلاطون، تئودوروس کورنه‌ای^۵ (حدود ۴۲۵ ق.م) نشان داد که $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{6}$ ، $\sqrt{7}$ ، $\sqrt{8}$ ، $\sqrt{10}$ ، $\sqrt{11}$ ، $\sqrt{12}$ ، $\sqrt{13}$ ، $\sqrt{14}$ ، $\sqrt{15}$ ، $\sqrt{17}$ نیز گنگ هستند [۴: ص ۷۹].

مقاله دهم اصول اقلیدس

اقلیدس در مقاله دهم اصول، بحث کمیت‌های گنگ ساده و مرکب را مورد بررسی قرار داده است. مقاله دهم اصول اقلیدس شامل ۱۱۵ قضیه و سه بخش تعریف است. در تعریف‌های بخش اول که در اول

^۳ در ادامه مقاله، مفهوم اندازه‌پذیری و اندازه‌ناپذیری توضیح داده خواهد شد.

^۴ در منبع ذکر شده به جای عبارت «کمیت»، عبارت «عدد» بیان شده است.

^۵ Theodorus of Cyrene





مقاله می‌آید، به تعریف کمیت‌های اندازه‌پذیر و کمیت‌های اندازه‌ناپذیر، مقادیر گویا و گنگ و در تعریف‌های بخش دوم که بعد از قضیه ۴۷ مطرح می‌شود، به تعریف خطوط مرکب ذوالاسمین اول تا ششم و در تعریف‌های بخش سوم که بعد از قضیه ۸۴ می‌آید به تعریف خطوط مرکب منفصل اول تا ششم می‌پردازد. در بخش‌های بعدی این مقادیر بررسی خواهند شد.

کمیت‌های اندازه‌پذیر و اندازه‌ناپذیر

کمیت‌هایی نسبت به هم «اندازه‌پذیر در طول» هستند که واحد اندازه‌گیری مشترک داشته باشند یا به عبارت دیگر نسبت بین آنها به وسیله نسبت بین دو عدد صحیح بیان شود. کمیت‌هایی را که نتوان به نسبت دو عدد صحیح بیان کرد کمیت‌های «اندازه‌ناپذیر در طول» گویند. خط‌های راستی را که در طول نسبت به هم اندازه‌ناپذیرند، بر حسب این که بتوان مربع‌هایی که بر روی آنها بنا می‌شود با یک واحد مساحت اندازه‌گیری کرد، یا به عبارت دیگر توان دوی این خطوط را بتوان به نسبت دو عدد صحیح بیان کرد، خطوط «اندازه‌پذیر در مربع»، در غیر این صورت این خطوط را «اندازه‌ناپذیر در مربع» گویند. با ذکر مثال این مطلب را روشن‌تر بیان می‌کنیم:

الف. دو کمیت اندازه‌پذیر در طول^۶:

$$\begin{cases} A :: \sqrt{3} \\ B :: \sqrt{12} \end{cases} \Rightarrow A : B :: \sqrt{3} : \sqrt{12} :: 1 : 2$$

ب. دو کمیت اندازه‌ناپذیر در طول و اندازه‌پذیر در مربع:

$$\begin{cases} A :: \sqrt{3} \\ B :: \sqrt{15} \end{cases} \Rightarrow A : B :: \sqrt{3} : \sqrt{15} :: 1 : \sqrt{5} \Rightarrow A^2 : B^2 :: 1 : 5$$

ج. دو کمیت اندازه‌ناپذیر در مربع:

$$\begin{cases} A :: \sqrt{\sqrt{3}} \\ B :: 2 \end{cases} \Rightarrow A : B :: \sqrt{\sqrt{3}} : 2 \Rightarrow A^2 : B^2 :: \sqrt{3} : 2$$

^۶ در این جا لازم است دو نکته را خاطر نشان کنیم:

- ۱- از آن جا که برای یونانیان مفهوم کسر و تساوی بین «کمیتی» مثل A و «عددی» مثل $\sqrt{3}$ مفهومی ندارد، از این رو بنا به قرارداد علامت کسر را با : نشان می‌دهیم و عبارتی مثل $A :: \sqrt{3}$ به این مفهوم است که اندازه (بزرگی) کمیت (پاره‌خط) A ، برابر کمیتی از جنس A است که به عنوان واحد انتخاب شده است.
- ۲- در این مقاله، علائمی که نشانگر کمیت‌ها (خطوط) هستند با حروف بزرگ و پررنگ مثل A ، B و ... و علائمی که نشانگر اعداد هستند با حروف کوچک و کم‌رنگ مثل a ، b و ... نشان داده شده‌اند. لازم به ذکر است که منظور از اعداد به کار برده شده با این علائم، اعداد گویا هستند.

کمیت‌های گویا و گنگ

در مورد کمیت‌های گویا و گنگ، تعریف اقلیدس، با آنچه امروزه از این اعداد تعریف می‌شود، تفاوت دارد. یک خط راست فرضی را بنا به قرارداد گویا در نظر می‌گیریم. اقلیدس نه تنها هر خط راستی را که با این خط راست گویای قراردادی، در طول اندازه‌پذیر باشد، بلکه هر خط راستی را که با این خط، فقط در مربع اندازه‌پذیر باشد، گویا (گویا در مربع) می‌نامد؛ اما اگر خطی نه در طول و نه در مربع با این خط اندازه‌پذیر باشد، آن را گنگ می‌نامد. از سوی دیگر، بنا به فرض مربع رسم شده بر روی این خط گویای فرضی را سطح گویا می‌نامیم و هر سطح اندازه‌ناپذیر با این سطح را سطح گنگ می‌نامیم.

در واقع اقلیدس، نه تنها $A :: a$ را کمیتی گویا می‌داند، بلکه $B :: \sqrt{a}$ نیز از نظر او گویا (گویا در مربع) است اما کمیتی مثل $C :: \sqrt{\sqrt{a}}$ که با کمیت گویای قراردادی $(A :: a)$ نه در طول و نه در مربع اندازه‌پذیر است، گنگ می‌نامد. اما در مورد سطح گویا، هر سطحی که امروزه به شکل رادیکالی از اندازه آن تعبیر شود، نمی‌توانسته سطحی گویا باشد، چرا که به زبان امروزی، طول مربع گویای قراردادی، فقط با یک درجه گنگی (با فرجه ۲) گویا در نظر گرفته می‌شده است و لذا سطح گویا، همان مفهوم سطح گویای امروزی را داشته است.

واضح است که این کمیت‌های گویا و گنگ کاملاً قراردادی هستند و با عوض شدن کمیت گویای فرضی اولیه، کمیت‌هایی که در قرارداد قبلی گویا به حساب می‌آمدند، در قرارداد جدید ممکن است گنگ شمرده شوند و یا برعکس.

اقلیدس نخستین کمیت گنگ را در قضیه ۲۱ مقاله ۱۰ این‌گونه معرفی می‌کند:

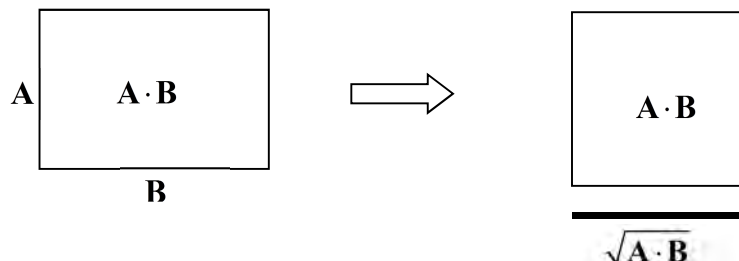
«مستطیل حاصل از خط‌های راست گویا که فقط در مربع اندازه‌پذیر هستند، گنگ است و ضلع مربع مساوی با این مستطیل نیز گنگ است (5: p 49)».

در تحریرهای^۷ دوره اسلامی از اصول اقلیدس، از این کمیت به موّسط (واسط)^۸ تعبیر می‌شود. در شکل زیر فرض می‌کنیم A و B دو خط گویای اندازه‌پذیر در مربع باشند. اگر مربعی مساوی با

^۷ تحریر اقلیدس، روایت عربی بازنگری شده اصول هندسه اقلیدس است. بازنویسی تمام یا بخشی از اصول اقلیدس از همان یونان باستان آغاز و در دوره اسلامی نیز به صورتی پیگیر دنبال شد. نصیرالدین طوسی نیز به پیروی از همین سنت کهن کوشید روایتی پاکیزه و روان و آسان فهم از اصول اقلیدس فراهم آورد. تا جایی که می‌دانیم عنوان تحریر [اصول] اقلیدس را پیش از وی، ابوالقاسم علی بن اسماعیل نیشابوری نیز — که ظاهراً پیش از سده ۵ ق می‌زیسته است — برای روایت بازنویسی شده خود از اصول اقلیدس به کار برده بود، اما اثر نصیرالدین طوسی در کوتاه‌مدت چنان شهرت یافت که از آن پس تقریباً همه فعالیت‌های دانشمندان دوره اسلامی درباره اصول اقلیدس، روی این روایت بازنویسی شده متمرکز شد. نصیرالدین در بازنویسی این اثر، بر آن بوده است که از اطناب ممل و ایجاز مخل دوری گزیند. وی در این تحریر نیز همچون تحریرالمجسطی که پیش‌تر به انجام رسانده بود، افزوده‌های خود را به شیوه شرح‌های قال - اقول، با ذکر عبارت «اقول» متمایز می‌سازد و گاه در پایان این افزوده‌ها از عبارت «عود (یا نعود) الی الكتاب» بهره می‌گیرد [۶].

^۸ برای توضیح هر چه بیش‌تر در مورد سطح و خط موّسط، مراجعه شود به [۷: ص ۶۵-۶۴].

سطح حاصل از این دو خط رسم کنیم، ضلع این مربع یعنی $\sqrt{A \cdot B}$ مساوی خط موّسط بحث شده خواهد بود.



به زبان ریاضی جدید، سطح موّسط به شکل $a\sqrt{b}$ یا $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})$ یا $\sqrt{c}$ و کمیت موّسط به شکل $\sqrt{a \cdot b}$ یا $(\sqrt{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}})$ است $\sqrt[3]{c}$ یا $\sqrt[4]{c}$ است a و b و c اعداد گویا و a و $(\sqrt{a})$ و $\sqrt{b}$ اندازه‌پذیر در مربع هستند و داریم: $c = a^2 \cdot b$ ($c = a \cdot b$).

گروه دیگر از پاره‌خط‌های گنگ، پاره‌خط‌هایی مرکب هستند که از افزودن یا کاستن دو پاره‌خط واجد شرایط توضیح داده شده در قضایای بعدی به دست می‌آیند. دسته‌بندی اقلیدس همراه با علائم جبری امروزی را می‌توان این‌چنین بیان کرد:

۱- الف. مجموع دو خط راست گویای اندازه‌پذیر در مربع که آن را «ذوالاسمین» می‌نامد [X.۳۶].^۹

ب. تفاضل دو خط راست گویای اندازه‌پذیر در مربع که آن را «منفصل» می‌نامد [X.۷۳].

به زبان امروزی، ذوالاسمین را می‌توان به شکل $\sqrt{a} + \sqrt{b} :: A + B$ و منفصل را به شکل $\sqrt{a} - \sqrt{b} :: A - B$ نشان داد، البته با این فرض که A و B دو کمیت گویا و اندازه‌پذیر در مربع هستند.

در تعریف اقلیدس، عباراتی مثل $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ ، $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ ، $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ و $\sqrt{3} - \sqrt{4}$ ، $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ منفصل هستند.

۲- الف. مجموع دو خط راست موّسط اندازه‌پذیر در مربع که مساحت حاصل از این دو خط گویا باشد. اقلیدس این خط گنگ را «ذوالموّسطین اول» می‌نامد [X.۳۷].

ب. تفاضل دو خط راست موّسط اندازه‌پذیر در مربع که مساحت حاصل از این دو خط گویا باشد. اقلیدس این خط گنگ را «منفصل اول یک خط راست موّسط» می‌نامد [X.۷۴].

با در نظر گرفتن این که A و B دو کمیت موّسط اندازه‌پذیر در مربع هستند که سطح گویایی را می‌سازند (یعنی به زبان امروزی حاصل ضرب آن دو، عددی گویا است)، ذوالموّسطین اول را به می‌توان به شکل $\sqrt[3]{a} \cdot b + \sqrt[3]{a} \cdot b :: A + B$ و منفصل اول یک خط راست موّسط را می‌توان به شکل

^۹ منظور، قضیه ۳۶ مقاله دهم اصول اقلیدس است.

$A - B :: \sqrt[3]{a}.b - \sqrt[3]{a}.b$ نشان داد.

۲-ج. مجموع دو خط راست موسّط اندازه‌پذیر در مربع که مساحت حاصل از این دو خط، موسّط باشد. اقلیدس این خط گنگ را «ذوالموسّطین دوم» می‌نامد [X.۳۸].

۲-د. تفاضل دو خط راست موسّط اندازه‌پذیر در مربع که مساحت حاصل از این دو خط، موسّط باشد. اقلیدس این خط گنگ را «منفصل دوم یک خط راست موسّط» می‌نامد [X.۷۵].

در این مورد، با توجه به تعاریف آن‌ها، ذوالموسّطین دوم را می‌توان با $A + B :: \sqrt[3]{a}.c + \frac{\sqrt{b}.c}{\sqrt[3]{a}}$ و

منفصل اول از یک خط راست را یا $A - B :: \sqrt[3]{a}.c - \frac{\sqrt{b}.c}{\sqrt[3]{a}}$ نشان داد.

با مراجعه به [۱: ص ۱۲۷]، توضیح دسته‌بندی اقلیدس از کمیت‌های گنگ را این‌گونه ادامه می‌دهیم: گروه بعدی مقادیر گنگ، با افزودن یا کاستن دو پاره‌خط A و B به یکدیگر که نه در طول و نه در مربع اندازه‌پذیر هستند به دست می‌آیند. در این‌جا مقادیر گنگ، بر اساس گویا یا موسّط بودن مجموع مربع‌های ساخته شده بر روی آنها، نیز سطحی که بین آنهاست، از یکدیگر متمایز می‌شوند با به کار بردن نشانه‌های جبری و ساده نمودن آن‌ها، موضوع را به صورت زیر می‌توان نشان داد:

$$(A \pm B)^2 = A^2 + B^2 \pm 2AB$$

در این صورت، سه حالت زیر امکان‌پذیر است:

(۱) $A^2 + B^2$ گویا و $2AB$ موسّط است.

(۲) $A^2 + B^2$ موسّط و $2AB$ گویا است.

(۳) $A^2 + B^2$ موسّط و $2AB$ موسّط است.

۳-الف. در حالت (۱)، پاره‌خط گنگ $A + B :: \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}} + \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}}$ را

«اعظم» [X.۳۹] و ۳-ب. پاره‌خط گنگ $A - B :: \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}} - \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}}$ را

«اصغر» می‌نامد [X.۷۶].

۳-ج. در حالت (۲)، پاره‌خط گنگ

$$A + B :: \frac{a}{\sqrt{2(1+b^2)}} \cdot \sqrt{\sqrt{1+b^2} + b} + \frac{a}{\sqrt{2(1+b^2)}} \cdot \sqrt{\sqrt{1+b^2} - b}$$

را «ضلع یک سطح گویا به اضافه یک سطح موسّط» می‌نامد [X.۴۰].

و پاره‌خط



$$A - B :: \frac{a}{\sqrt{2(1+b^2)}} \cdot \sqrt{\sqrt{1+b^2} + b} - \frac{a}{\sqrt{2(1+b^2)}} \cdot \sqrt{\sqrt{1+b^2} - b}$$

را پاره‌خطی که «با یک سطح گویا، یک کل موسّط پدید می‌آورد» می‌نامد [X.۷۷].

$$3-5. \text{ در حالت (۳) پاره‌خط گنگ } A+B :: \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{2}} \sqrt{1+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}} + \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{2}} \sqrt{1-\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}}$$

مجموع دو سطح موسّط [X.۴۱] و ۳-و. پاره‌خط گنگ

$$10. A-B :: \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{2}} \sqrt{1+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}} - \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{2}} \sqrt{1-\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}}$$

خطی که «با یک سطح موسّط، یک کل موسّط پدید می‌آورد»، نامیده می‌شود [X.۷۸].

علاوه بر این تقسیم‌بندی دوازده‌گانه، اقلیدس در تقسیم‌بندی دیگری، هر کدام از ۱-الف و ۱-ب را به با بیان ویژگی‌های آنها به گروه‌های شش‌گانه تقسیم می‌کند که به ترتیب شامل ذوالاسمین‌های اول تا ششم و منفصل‌های اول تا ششم هستند که در زیر به آنها اشاره می‌شود و هر کدام با ذکر مثالی توضیح داده می‌شود.

خط ذوالاسمین اول تا ششم

الف. ذوالاسمین اول

خط ذوالاسمین $A+B$ را در نظر می‌گیریم. با دارا بودن دو شرط زیر این خط، ذوالاسمین اول است:

- ۱- با فرض $A > B$ باید A گویا در طول و B گویا در مربع باشد.
 - ۲- اگر داشته باشیم $A^2 - B^2 = C^2$ ، آن‌گاه باید A با C در طول اندازه‌پذیر باشد.
- مثال:

$$A :: 3, B :: \sqrt{8} \Rightarrow A+B :: 3 + \sqrt{8}$$

$$3 > \sqrt{8}, (3)^2 - (\sqrt{8})^2 = (1)^2$$

همان‌طور که می‌دانید $A :: 3$ با $C :: 1$ اندازه‌پذیر است.

ب. ذوالاسمین دوم

برای ذوالاسمین دوم داریم:

- ۱- با فرض $A > B$ باید A گویا در مربع و B گویا در طول باشد.
- ۲- اگر داشته باشیم $A^2 - B^2 = C^2$ ، آن‌گاه باید A با C در طول اندازه‌پذیر باشد.

^{۱۰} برای توضیح بیش‌تر در مورد این دسته‌بندی‌های اقلیدس و توضیح آنها به زبان امروزی، می‌توانید به [5: p 83-91] مراجعه کنید.

مثال:

$$\begin{aligned} A &:: \sqrt{12}, B:: 3 \Rightarrow A+B:: \sqrt{12}+3 \\ \sqrt{12} &> 3, (\sqrt{12})^2 - (3)^2 &= (\sqrt{3})^2 \\ \sqrt{12}: \sqrt{3} &:: 2:1 \end{aligned}$$

ج. ذوالاسمین سوم

برای ذوالاسمین سوم می‌توان گفت:

- ۱- با فرض $A > B$ باید A و B هر دو گویا در مربع باشد.
- ۲- اگر داشته باشیم $A^2 - B^2 = C^2$ ، آن‌گاه باید A با C در طول اندازه‌پذیر باشد.

مثال:

$$\begin{aligned} A &:: \sqrt{8}, B:: \sqrt{6} \Rightarrow A+B:: \sqrt{8}+\sqrt{6} \\ \sqrt{8} &> \sqrt{6}, (\sqrt{8})^2 - (\sqrt{6})^2 &= (\sqrt{2})^2 \\ \sqrt{8}: \sqrt{2} &:: 2:1 \end{aligned}$$

د. ذوالاسمین چهارم

برای ذوالاسمین اول تا سوم A با C در طول اندازه‌پذیر است، اما برای ذوالاسمین‌های چهارم تا ششم داریم:

- ۱- با فرض $A > B$ باید A گویا در طول و B گویا در مربع باشد.
- ۲- اگر داشته باشیم $A^2 - B^2 = C^2$ ، آن‌گاه باید A با C در مربع اندازه‌پذیر باشد.

مثال:

$$\begin{aligned} A &:: 4, B:: \sqrt{8} \Rightarrow A+B:: 4+\sqrt{8} \\ 4 &> \sqrt{8}, (4)^2 - (\sqrt{8})^2 &= (\sqrt{8})^2 \\ C &:: \sqrt{8} \Rightarrow \sqrt{8}: 4:: \sqrt{2}: 2 \end{aligned}$$

ه. ذوالاسمین پنجم

اما شروط لازم برای ذوالاسمین پنجم عبارت است از:

- ۱- با فرض $A > B$ باید A گویا در مربع و B گویا در طول باشد.
- ۲- اگر داشته باشیم $A^2 - B^2 = C^2$ ، آن‌گاه باید A با C در مربع اندازه‌پذیر باشد.

مثال:

$$A :: \sqrt{20}, B :: 4 \Rightarrow A + B :: \sqrt{20} + 4$$

$$\sqrt{20} > 4, (\sqrt{20})^2 - (4)^2 = (2)^2$$

$$\sqrt{20} : 2 :: \sqrt{5} : 1$$

و. ذوالاسمین ششم

و بالاخره برای ذوالاسمین ششم داریم:

۱- با فرض $A > B$ باید A و B هر دو گویا در مربع باشد.

۲- اگر داشته باشیم $A^2 - B^2 = C^2$ ، آن‌گاه باید A با C در مربع اندازه‌پذیر باشد.

مثال:

$$A :: \sqrt{12}, B :: \sqrt{10} \Rightarrow A + B :: \sqrt{12} + \sqrt{10}$$

$$\sqrt{12} > \sqrt{10}, (\sqrt{12})^2 - (\sqrt{10})^2 = (2)^2$$

$$\sqrt{12} : \sqrt{2} :: \sqrt{6} : 1$$

منفصل اول تا ششم

در هر کدام از ذوالاسمین‌های شش‌گانه اگر جزء کوچک‌تر را به جای اینکه با جزء بزرگ‌تر جمع کنیم، از آن کم کنیم، منفصل‌های شش‌گانه به دست می‌آید.

شرح‌های دوره اسلامی از مقاله دهم اصول اقلیدس و تلاش دانشمندان این دوره برای جبری کردن مفهوم هندسی کمیت‌های گنگ

در دوره اسلامی، اصول دو بار توسط حجاج بن یوسف بن مطر (ترجمه‌های مشهور به هارونی و مأمونی) و یک بار توسط اسحاق بن حنین به عربی ترجمه شد که ثابت بن قره آن را اصلاح کرد. مهمترین تحریری که از اصول اقلیدس در دوره اسلامی به عمل آمد، تحریر خواجه نصیرالدین طوسی است. کتاب اصول اقلیدس که شامل ۱۳ مقاله (کتاب) است، در دوره اسلامی مورد توجه دانشمندان قرار گرفت و شرح‌هایی بر کل و یا بخشی از آن نوشته شد. در همین دوره شرح‌هایی بر مقاله دهم اصول نوشته شد که از آن جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

شرح کتاب دهم از ماهانی؛ تفسیر صدرالمقالة العاشره من کتاب اقلیدس از ابو جعفر خازن که شرحی است بر تعریفات کتاب دهم؛ شرح ابن راهویه ارجانی؛ شرح ابویوسف رازی؛ شرح احمد بن حسین اهوازی؛ شرح ملا محمد حسین نطنزی کاشانی که از روی ترجمه عربی آن به فارسی ترجمه و شرح شده است و شرح ملا محمد باقر یزدی با عنوان شرح المقالة العاشره من تحریر اصول اقلیدس.

با بررسی این شروح و تألیفاتی هم که در خصوص مطالب مقاله دهم اصول در دوره اسلامی تدوین شده است که در ادامه به برخی از آنها اشاره خواهیم کرد، مشخص می‌شود دانشمندان اسلامی

کوشیده‌اند تا اعداد گنگ را در ریاضیات وارد کنند و چنین مفهومی را تحقق بخشند. نگاهی به شرح ماهانی [(؟- در حدود ۲۷۵ ق) (۸: ص ۴۱۳)] بر مقاله دهم اقلیدس، می‌تواند ما را در ارزیابی سهم او در نظریه اعداد گنگ راهنما باشد. رفتار او با مقادیر گنگ همانند رفتار او با اعداد گنگ است. او به راحتی با چنین مقادیری برخورد می‌کند، اما برای تشریح مطالب به تعبیرهای هندسی متوسل می‌شود. علاوه بر این، ماهانی متن مقاله دهم را با به کار بردن اعداد گویا و گنگ (به جای مقادیر هندسی) تفسیر و تشریح نمود. با این ترتیب، آن چه را اقلیدس موسّط می‌نامد، جذر الجذر یا «ریشه ریشه» می‌شود [۱: ص ۱۳۴-۱۳۵]

ابوعلی محمد بن عبدالعزیز هاشمی (قرن دهم ق) صاحب رساله‌ای تحت عنوان رساله فی الحساب الجذور الصم = درباره محاسبه جذرهای گنگ است. از این کتاب دو نسخه خطی وجود دارد. هاشمی می‌گوید رساله‌ای در حساب به نام الوافی فی الحساب داشته که در آن قواعد گرفتن جذر را توضیح داده است. تاکنون از این رساله نسخه‌ای به دست نیامده است. در معرفی آن مؤلف [رساله] می‌گوید هدف او تألیف رساله‌ای است که مبتدیان را کمک کند و ابهام قضایا را «با به کار بردن اعداد» رفع نماید. رساله به کار بردن قوانین حساب را در مورد اعداد گنگ تشریح می‌نماید.

یکی از ویژگی‌های ریاضیدانان سده‌های میانه مشرق زمین در مورد مسئله گنگ‌ها این است که از یک طرف ماهیت حسابی مقادیر گنگ را می‌شناسند و قوانین آنها را از قوانین مشابه در اعداد استخراج می‌کنند و از طرف دیگر، با این که قوانین جدیدی به اثبات رسانده‌اند، خود را ناگزیر به استفاده از براهین هندسی می‌بینند. واقعیت این است که هاشمی برای اعداد برهان‌های کلی پیدا کرده است و کمتر به ادله هندسی توجه می‌نماید. او به ضرب و تقسیم خطوط راست می‌پردازد. مخصوصاً باید این موضوع را یادآور شد که در حل مسائل مربوط به گنگ‌ها از خوانندگان رساله می‌خواهد به طور قطعی از اعداد استفاده کنند [۱: ص ۱۳۵-۱۳۶]

ابو عبدالله حسن بن محمد بن حمله که به ابن بغدادی معروف است، مؤلف رساله فی المقادیر المشترکة و المتباینة = رساله در مقادیر متوافق [اندازه‌پذیر] و متباین [اندازه‌ناپذیر] می‌باشد. بدون شک این دانشمند در اواخر قرن دهم و اوایل قرن یازدهم می‌زیسته است.

ابن بغدادی، در رساله نامبرده می‌کوشد تا قواعد کار کردن با اعداد گنگ را با قسمت‌های اصلی کتاب اصول تلفیق نماید و در عین حال اعتبار روش‌های محاسباتی روزگار خود را به اثبات رساند. او می‌گفت استفاده عملی از اعداد گنگ فواید بسیار دارد «فرض یک عدد و مبنا قرار دادن آن، آسان‌تر و حتی عملی‌تر است تا این که بخواهیم با همان فرض، یک مقدار را مورد توجه قرار دهیم». او همچنین بین مقادیر گویا از یک طرف و اعداد از طرف دیگر تطابقی نظیر به نظیر ایجاد می‌کند سپس به مقادیری که در درجه‌های مختلف از گنگ بودن قرار دارند، می‌پردازد. در واقع در تعریف او، گنگ‌های مرتبه اول، هم‌ردیف ریشه اعداد و گنگ‌های مرتبه دوم هم‌ردیف ریشه اعداد قرار می‌گیرند و الی آخر [۱: ۱۴۷-۱۵۰].



از جمله مهمترین اشخاصی که قواعد حسابی را در مورد کمیت‌های گنگ نیز به کار برد، می‌توان از ابوبکر محمد بن حسین (حسن) کرجی (قرن ۴ و ۵ ق)، نام برد. هدف او این است که نشان دهد این قواعد، وقتی در مورد کمیات گنگ (یا مقادیر ناهمسنجه [اندازه‌ناپذیر]) به کار روند، ویژگی‌های خود را حفظ می‌کنند. کرجی مفاهیم ناهمسنجه [اندازه‌ناپذیر] و گنگ را بر اساس کتاب دهم اصول اقلیدس تعریف می‌کند. البته او نمی‌تواند کاربرد این مفاهیم را در مورد اعداد توجیه کند. به نظر راشد^{۱۱}، تنها توجیه، تصویری است که او از جبر داشته است: چون کمیات هندسی (طولها) و اعداد می‌توانند به طور یکسان مقدار مجهول یک معادله جبری قرار گیرند، بنابراین می‌توان قواعد حسابی یکسانی را درباره آنها به کار برد. به این طریق است که کرجی کار تعبیر جبری مطالب مقاله دهم اصول اقلیدس را که در نظر عموم ریاضی‌دانان یونانی یک مقاله هندسی محض بود، پیش می‌برد. [همان‌طور که پیش‌تر ذکر شد] پیش از او در حدود نیمه سده ۳ ق/م، ماهانی، تعبیری عددی از کمیت‌های گویا و گنگ مقاله دهم به دست داده بود. وی تعریفی از کمیات گنگ و به همراه آن، نخستین طبقه‌بندی کمیاتی را که به کمک رادیکال ساختنی‌اند، به دست می‌دهد. از نظر کرجی، مفاهیمی که در این مقاله آمده است، با کمیات به طور کلی سر و کار دارند و بنابراین، در حوزه علم جبر قرار می‌گیرند. «کمیات گویا و گنگ، دیگر به کمک پاره‌خطها معرفی نمی‌شوند و برای اولین بار منزلتی صرفاً عددی پیدا می‌کنند. به این دلیل است که کرجی بارها از العدد المنطق (عدد گویا) و العدد الأصم (عدد گنگ) سخن می‌گوید» [۲].

پروفسور گالینا ماتویفسکایا^{۱۲}، در مقاله خود^{۱۳} پس از بررسی شروح مختلف انجام شده بر روی مطالب مقاله دهم اصول اقلیدس در دوره اسلامی، این گونه نتیجه‌گیری می‌کند:

بررسی‌های من در شرح‌های مختلف مقاله دهم اصول، به خوبی نشان می‌دهد که ریاضیدانان قرون وسطای مشرق زمین با اعداد گنگ به عنوان عدد کاملاً آشنا بودند و در محاسبات خود آنها را به آسانی به کار می‌برده‌اند و از شکل بخشیدن به این نظریه چشم پوشی ننموده‌اند. علاقه آنها به مقاله دهم قابل درک است: «آنها به منظور آشکار ساختن طبیعت ریشه اعداد و یافتن پایه محکمی برای یافتن قواعد استفاده عملی از اعداد گنگ به این کار می‌پرداخته‌اند.»

مؤلفین قرون وسطی، آشکارا به مسائل نظری خالص شرح‌های مقاله دهم روی آوردند، در حالی که رساله‌های جبری که بر مبنای نظریات مشروح در این منابع تدوین شده‌اند، قوانین شسته و رفته‌ای عرضه می‌نمایند که در کتاب اقلیدس یافت نمی‌شود. رساله‌های بحث شده گواه بر آنند که مؤلفین آنها رابطه بین درجه‌دوم‌های گنگ را که در مقاله دهم کتاب اصول طبقه‌بندی شده‌اند با دستگاه معادلات جبری درجه دوم

¹¹ Roshdi Rashed

¹² Galina Matvievskaia

¹³ رجوع شود به صفحه ۲ پاورقی شماره ۱.

دریافته‌اند: قواعدی را که برای تعیین ذوالاسمین‌ها و منفصل‌ها به دست داده‌اند، غالباً مانند راه‌حل‌های معادلات درجه دوم تنظیم نموده‌اند. [۱: ص ۱۵۸-۱۵۷].

نتیجه‌گیری

تفاوت بین هندسه (علمی که به مقادیر پیوسته می‌پردازد) و حساب (علم کمیت‌های گسسته) باعث یکی از مشکلات اساسی منطقی شد که ریاضیدان‌ها قرن‌ها با آن روبه‌رو بودند. تنها با یکی کردن دو مفهوم «عدد» و «مقدار» در یک مفهوم عام‌تر برای اعداد حقیقی و گنگ این مشکل می‌توانست حل شود [۱: ص ۱۲۴]. به طور کلی، توجه به این مطلب که نسبت یک پاره‌خط به دیگری (که به عنوان واحد برگزیده شده است)، یعنی به طور ساده طول پاره‌خط، می‌تواند مثل یک عدد مورد بررسی قرار گیرد، برای یونانی‌ها نتوانست به وجود آید و اصولاً مفهوم عدد گنگ برای آنها به وجود نیامد [۹: ص ۵۰-۵۱]. اکنون مسلم شده است که دانشمندان خاورزمین کوشیده‌اند تا اعداد گنگ را در ریاضیات وارد نموده و چنین مفهومی را تحقق بخشند. به علت پیشرفت جبر عددی در قرون وسطی در شرق بود که قوانین ریاضی حاکم بر اعداد گنگ، با محاسبات علمی تلفیق گردید. رساله‌های مختلفی که در آن هنگام در علم جبر تألیف شده است، شاهی بر این مدعاست [۱: ۱۲۴-۱۲۵].

منابع

- [۱] فاطمی دزفولی، سید محمد رضا: تصحیح و ترجمه رساله شرح صدر مقاله دهم کتاب اقلیدس از ابوالحسن اهوازی، سازمان چاپ و انتشارات دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ۱۳۹۱.
- [۲] معصومی همدانی، حسین، «جبر، یا جبر و مقابله»، دائرةالمعارف بزرگ اسلامی، جلد هفدهم، تهران، ۱۳۸۸.
- [۳] هیث، سر تامس لیتل: تاریخ ریاضیات یونان، ترجمه احمد آرام، شرکت انتشارات علمی و فرهنگی، تهران، ۱۳۸۱.
- [۴] ایوز، هاوارد دبلیو: آشنایی با تاریخ ریاضیات، ترجمه محمد قاسم وحیدی اصل، جلد اول (ویرایش دوم)، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۹.
- [5] Heath. T. L., *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, vol. III, Cambridge, 1968.
- [۶] کرامتی، یونس، «تحریر اقلیدس»، دائرةالمعارف بزرگ اسلامی، جلد چهاردهم، تهران، ۱۳۸۵.
- [۷] اخوان مهدوی، محمود: شرح اصول اقلیدس (مقاله دهم) حاج ملا محمد حسین نطنزی کاشانی، انتشارات مجمع ذخایر اسلامی، قم، ۱۳۸۷.
- [۸] قربانی، ابوالقاسم: زندگی‌نامه ریاضی‌دانان دوره اسلامی از سده سوم تا سده یازدهم هجری، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۷۵.
- [۹] آلساندروف-نیکولسکی-دلون: ریاضیات، محتوی روش و اهمیت آن، ترجمه پرویز شهریاری، جلد اول، انتشارات توکا، ۱۳۳۶.
- [10] Galina Matvievskaia, "The Theory of Quadratic Irrationals in Medieval Oriental Mathematics", *Annals of the New York Academy of Sciences*, vol. 500, 1987, pp. 253-275.

