

مسئله‌های ریاضی پیرامون شطرنج

از ایران هزار سال پیش و ارتباط آنها با مربع‌های وفقی و نظریه گرافها*

محمد باقری^۱

بازی شطرنج از لحاظ قدمت و رواجش بی‌نظیر است. طبق افسانه‌ها این بازی در هند ابداع شد و از این لحاظ همانند دستگاه عددنویسی دهدهی، از دستاوردهای عالمگیر هندیان است.

شطرنج انواع گوناگونی با قواعد گوناگون داشته ولی اصول کلی آن تا زمان حاضر حفظ شده است. مثلاً علاوه بر شطرنج ۸×۸ خانه کنونی، شطرنج ۱۰×۱۰ خانه و شطرنج ۱۶×۴ خانه و همچنین شطرنج مدور (رومی) شامل ۴ حلقه مدور هر کدام دارای ۱۶ خانه وجود داشته است.

با آنکه برخی علمای اسلام شطرنج را حرام می‌دانستند این بازی در تمدن اسلامی رواج زیادی یافت. در کتاب‌های تاریخ از شطرنج‌بازان معروف نام برده شده و رساله‌های فارسی و عربی زیادی نگاشته شده و به دست ما رسیده است. در این آثار علاوه بر تاریخچه، انواع و قواعد شطرنج و مسائل زیادی مربوط به حالت پایانی شطرنج به عنوان معما آمده است. همچنین برخی معماهای ریاضی بر اساس صفحه شطرنج و حرکت مهره‌های آن مطرح شده است. یک معمای بسیار مشهور «گردش اسب» است که بعدها «مسئله اویلر» نامیده شد.

در مسئله گردش اسب، مهره اسب از خانه‌ای در شطرنج خالی شروع به حرکت‌های متوالی L مانند می‌کند و در ۶۳ حرکت همه خانه‌های شطرنج را می‌پیماید. اگر خانه آخر به اندازه یک حرکت اسب از خانه آغاز فاصله داشته باشد، این گردش «بسته» خوانده می‌شود. گردش بسته اسب مرتبط با مفهوم چرخه همیتونی در نظریه ریاضی گراف‌هاست. چندین هزار میلیون جواب برای این مسئله وجود دارد که حدود ۱۲۲ میلیون آنها بسته یا همیتونی است.

لئونارد اویلر (۱۷۰۷-۱۷۸۳م) ریاضی‌دان برجسته سوئیس این مسئله را مطالعه و ارتباطی بین مسئله گردش اسب و مربع‌های وفقی برقرار کرد. در گردش اسب شکل ۱ که اویلر یافته است، از یک گوشه (خانه شماره ۱) شروع می‌کنیم و حرکت‌های متوالی اسب را متناظر با عددهای ۲ تا ۶۴ انجام می‌دهیم.

*. صورت اولیه این مقاله به زبان انگلیسی در سی و دومین همایش بین‌المللی سالانه آکادمی علوم روسیه، شاخه پترزبورگ، در آذر ۱۳۹۰ عرضه شده است.

۱. سردبیر نشریه میراث علمی اسلام و ایران، mohammad.bagheri2006@gmail.com

۱	۴۸	۳۱	۵۰	۳۳	۱۶	۶۳	۱۸
۳۰	۵۱	۴۶	۳	۶۲	۱۹	۱۴	۳۵
۴۷	۲	۴۹	۳۲	۱۵	۳۴	۱۷	۶۴
۵۲	۲۹	۴	۴۵	۲۰	۶۱	۳۶	۱۳
۵	۴۴	۲۵	۵۶	۹	۴۰	۲۱	۶۰
۲۸	۵۳	۸	۴۱	۲۴	۵۷	۱۲	۳۷
۴۳	۶	۵۵	۲۶	۳۹	۱۰	۵۹	۲۲
۵۴	۲۷	۴۲	۷	۵۸	۲۳	۳۸	۱۱

شکل ۱

مجموع عددهای صحیح ۱ تا ۶۴ می‌شود ۲۰۸۰ که برابر با ۸×۲۶۰ است. در این جدول مربع، مجموع عددهای موجود در هر سطر یا ستون ۲۶۰ است. مجموع عددهای واقع بر هر قطر مربع مساوی نیست، بنابراین، مربع مذکور نیمه‌وفقی به حساب می‌آید. اما این مربع خواص دیگری دارد: با دو خط مرکزی عمودی و افقی می‌توانیم آن را به چهار مربع ۴×۴ تقسیم کنیم که مجموع اعداد هر سطر یا ستون در آنها ۱۳۰ است. می‌بینیم که این جواب بسته نیست (فاصله خانه‌های ۱ و ۶۴ به اندازه یک حرکت اسب نیست).

تعداد ۲۴۲ گردش اسب مختلف وفقی یا نیمه‌وفقی (با مجموع‌های قطری نابرابر) وجود دارد که بیشتر آنها بسته (همیلتونی) هستند. ممکن است خواسته شود که گردش اسب را از خانه‌ای مجاور به مرکز صفحه شطرنج آغاز کنیم. بدیهی است که اگر گردش اسب همیلتونی یا بسته باشد، آن را می‌توان به گردش اسبی که از هر خانه دلخواه آغاز شود تبدیل کرد. مربع نیمه‌وفقی شکل ۲ را هم اوایلر یافته است. این گردش اسب بسته است زیرا خانه‌های شماره ۱ و ۶۴ به اندازه یک حرکت اسب با هم فاصله دارند.

اوایلر مطالبش را درباره مربع‌های وفقی در سال ۱۷۷۶م در آکادمی علوم پترزبورگ عرضه کرد. معماهایی مرتبط با گردش اسب در رساله‌ای عربی که دست‌نوشته آن در استانبول نگهداری می‌شود بیان شده است. نام رساله کتاب الشطرنج من تألیف العدلی والصولی و غیرها است که در مجموعه لاله اسماعیل افندی در کتابخانه سلیمانیه استانبول به شماره ۵۶۰ (شامل ۱۴۲ برگ به تاریخ استنساخ ۵۳۵ ق) محفوظ است. پرفسور فؤاد سزگین چاپ عکسی این رساله را در سال ۱۹۸۶ م در مؤسسه تاریخ علوم عربی - اسلامی دانشگاه یوهان ولفگانگ گوته (فرانکفورت) منتشر کرده است. این رساله کهن‌ترین و ارزشمندترین اثر در تاریخ شطرنج است.

۵۰	۱۱	۲۴	۶۳	۱۴	۳۷	۲۶	۳۵
۲۳	۶۲	۵۱	۱۲	۲۵	۳۴	۱۵	۳۸
۱۰	۴۹	۶۴	۲۱	۴۰	۱۳	۳۶	۲۷
۶۱	۲۲	۹	۵۲	۳۳	۲۸	۳۹	۱۶
۴۸	۷	۶۰	۱	۲۰	۴۱	۵۴	۲۹
۵۹	۴	۴۵	۸	۵۳	۳۲	۱۷	۴۲
۶	۴۷	۲	۵۷	۴۴	۱۹	۳۰	۵۵
۳	۵۸	۵	۴۶	۳۱	۵۶	۴۳	۱۸

شکل ۲

ابن ندیم در الفهرست عدلی را به عنوان مؤلف نخستین کتاب شطرنج ذکر کرده و افزوده است که او در حضور خلیفه متوکل (درگذشته ۲۴۷ق) بازی می‌کرد. نام کاملش ابوالعباس احمد عدلی و احتمالاً همان شطرنج‌باز و مؤلفی است که ابن ابی اصیبعه (سده ۷ق) در عیون الانباء فی طبقات الاطباء و حاجی خلیفه (سده ۱۰ق) در کشف‌الظنون از او با نام ابوالعباس احمد بن محمد سرخسی (درگذشته ۲۸۶ق) یاد کرده‌اند. او را عدلی رومی هم خوانده‌اند، شاید به این علت که مدتی در آسیای صغیر می‌زیست. ابو زکریا یحیی بن ابراهیم حکیم مؤلف رساله‌ای عربی به نام نزهة ارباب العقول فی الشطرنج المنقول که دست‌نوشته آن به شماره ۵۹ در کتابخانه جان ریلندز^۱ منچستر نگهداری می‌شود، در این رساله یافتن جواب مسئله گردش اسب را به عدلی نسبت داده است.^۲

صولی که حدود یک قرن پس از عدلی می‌زیست از ترکان ساکن در آبادی کوچکی به نام صول در جنوب شرقی دریای خزر بود. او آموزگار شطرنج خلیفه مکتفی، خلیفه مقتدر و خلیفه الرازی بالله بود و ابن خلدون، مسعودی و صفدی مهارت او را در شطرنج بازی ستوده‌اند.

به نوشته پرفسور فؤاد سزگین، مؤلف ناشناخته رساله کتاب الشطرنج من تألیف العدلی والصولی و غیرهما بین نیمه اول قرن چهارم و اوایل قرن ششم هجری می‌زیست. پس می‌توان گفت که این رساله حدود هزار سال پیش تألیف شده است. اروپاییان در سال ۱۸۸۱ با انتشار ویرایش جدید کتاب آلمانی آ. فون لینده درباره تاریخ شطرنج از وجود رساله فوق و محتویات آن آگاه شدند.

بیست و چهار برگ نخست دست‌نوشته این رساله شامل اطلاعات بسیار جالبی درباره تاریخچه شطرنج است. هفت برگ پایانی آن حاوی هفت شعر عربی درباره شطرنج است که پنج تای آنها مربوط به جواب‌های مسئله گردش اسب یا حالت‌های پیچیده‌تر آن است. کلید ارتباط بین جواب‌ها و شعرها بر

1. John Rylands

۲. رساله نزهة ارباب العقول ... به تصحیح دکتر معجب العدوانی در سال ۱۳۹۱ در عربستان منتشر شده است.

پشت برگ ۷۴ دست‌نوشته رساله (ص ۱۴۸ چاپ عکسی) ثبت شده است (این برگ هنگام صحافی جابجا شده و محل درست آن بین برگ ۱۳۵ و ۱۳۶ است). چنان که در شکل ۳ می‌بینید هر خانه صفحه شطرنج با دو حرف الفبا مشخص شده است (همان‌طور که امروزه با یک حرف الفبای انگلیسی و یک عدد نشان داده می‌شود). ترتیب حروف مطابق شیوه ابجد است که در گذشته برای عددنویسی به کار می‌رفت و مطابق با ترتیب حروف در الفبای عبری بود. سطرها از پایین به بالا با حروف ا، ب، ج، د، ه، و، ز و ح مشخص شده‌اند که معادل عددی آنها ۱ تا ۸ است. ستون‌ها هم با حروف ی، ک، ل، م، ق، ر، ش و ت مشخص شده‌اند که معادل عددی آنها در شیوه ابجد به ترتیب ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰ و ۱۰۰، ۲۰۰، ۳۰۰ و ۴۰۰ است. دنبال نکردن مضرب‌های ۱۰ در اینجا احتمالاً به خاطر پرهیز از اشتباه ناشی از تشابه حروف بود.

ح	ح	ح	ح	ح	ح	ح	ح
ز	ز	ز	ز	ز	ز	ز	ز
و	و	و	و	و	و	و	و
ه	ه	ه	ه	ه	ه	ه	ه
د	د	د	د	د	د	د	د
ج	ج	ج	ج	ج	ج	ج	ج
ب	ب	ب	ب	ب	ب	ب	ب
ا	ا	ا	ا	ا	ا	ا	ا
ی	ک	ل	م	ق	ر	ش	ت

شکل ۳: صفحه ۱۴۸ چاپ عکسی

هر شعر ۳۲ بیت و ۶۴ مصراع دارد. دو حرف اول هر مصراع محل خانه‌ای را که در هر حرکت مهره شطرنج مطابق مختصات قائم بیان شده است مشخص می‌کند. نخستین شعر منسوب به شخصی به نام طاهر است که جواب مسئله گردش اسب را برای حالت شروع از خانه یا (گوشه پایین - راست) عرضه می‌کند. حرکت اسب در کل صفحه شطرنج بر اساس این شعر مطابق جدول شکل ۴ خواهد بود.

۳۵	۴۰	۴۷	۴۴	۶۱	۸	۱۵	۱۲
۴۶	۴۳	۳۶	۴۱	۱۴	۱۱	۶۲	۹
۳۹	۳۴	۴۵	۴۸	۷	۶۰	۱۳	۱۶
۵۰	۵۵	۴۲	۳۷	۲۲	۱۷	۱۰	۶۳
۳۳	۳۸	۴۹	۵۴	۵۹	۶	۲۳	۱۸
۵۶	۵۱	۲۸	۳۱	۲۶	۲۱	۶۴	۳
۲۹	۳۲	۵۳	۵۸	۵	۲	۱۹	۲۴
۵۲	۵۷	۳۰	۲۷	۲۰	۲۵	۴	۱

شکل ۴

شعر طاهر با این بیت‌ها شروع می‌شود:

يا سائلي عن حكمة الشطرنج لبذخه برومها والزنج

(ای پرسنده از حکمت شطرنج - و گشاده‌دستی‌اش به رومیان و زنگیان)

جیادها تجری بلا غبار اک - ابر تمنوا علی صغار

(اسبان‌ش بی گرد و غبار در حرکتند - و مهتران در برابر کهتران سر فرود آرند)

پس حرکت اسب در خانه‌های یا، یب، یج و کا شروع می‌شود. توجه کنید که این گردش اسب بسته است زیرا از خانه ۶۴ می‌توان با یک حرکت اسب به خانه اول رسید.

شعر دوم از ابوبکر ابن دُرَید^۱ است و همان جواب قبلی را در قالب شعر عربی دیگری عرضه می‌کند. دو بیت آغاز آن چنین است (ص ۲۷۳ چاپ عکسی):

يا سائلي عما عليه استعجبا لباک من صرح ما تجمجبا

(ای پرسنده از آنچه پوشیده و نامعلوم است - گوش به فرمان توام ای که گنگی‌ها را آشکار کرده‌ای)

يحيى فکراً في الأمور لهذا كأن فيه الرشد قد تقوما

(اندیشه در کارها چنان در جولان است - که گویی هدایت راست آمده است)

شعرهای سوم و چهارم بدون ذکر نام شاعر و برای بیان همان جواب آورده شده‌اند. شعر سوم چنین آغاز می‌شود:

يا سلم اسلمت فؤادي للردى لييك إذ ناديتني هأنذا

(ای سلم قلب مرا به هلاکت افکندی - و من گوش به فرمان توام)

^۱ ابوبکر محمد بن حسن بن درید (۲۲۳-۳۲۱ق)، ادیب زبان‌شناس و شاعر شافعی متولد بصره و ساکن بغداد.

يَجْعَلُ قَلْبِي لَكَ تَبْرِيحَ الْجَوِي كَالْعَبْدِ طَوْعاً الْكُفِّ فَارِضِي أَنْ تَرِي

(چه قلب من برای تو از شوق در رنج است - چون بنده‌ای در دستان مولایش، پس از دیدنم راضی باش)

شروع شعر چهارم هم این است:

يَا سَلْمُ اسْلَمْتِ فَوْادِي لِلرَّدِي لَيْبِكُ يَا دَاعِي الصَّبَا هَانِذَا

(ای سلم قلب مرا به هلاکت افکندی - گوش به فرمانم ای که مرا به عشق می‌خوانی)

يَجِيْبُ صَبَّاً ذَا غِرَامٍ وَهَوِي كَالْعَبْدِ طَوْعاً لَكَ حَرْبٍ لِلْعُدِي

(عاشقی دلداه و شیفته پاسخگوست - چون بنده‌ای در دستانت آماده رزم با دشمنان)^۱

شعر پنجم ۱۰ مصراع دارد. شعر ششم دارای ۶۵ مصراع است و ارتباطی به مختصات حرفی خانه‌های شطرنج ندارد.

شعر هفتم از کسی به نام علی بن عبدالله شیرازی است و به امیری به نام ابی نصر محمد بن احمد تقدیم شده است. این شعر هم ۳۲ بیت و ۶۴ مصراع دارد و بیانگر جواب مسئله برای حرکتی است که مهره‌ای متناوباً به صورت حرکت‌های اسب و فیل جابجا شود. البته در اینجا حرکت فیل تنها دو خانه مورّب است (برعکس قاعدهٔ امروزی که فیل می‌تواند هر تعداد خانهٔ مورّب حرکت کند). این حالت جالب‌تر و پیچیده‌تری از مسئلهٔ گردش اسب است. توالی حرکت مهره در خانه‌ها با اعداد به شیوهٔ ابجد بر پشت برگ ۷۵ رساله (که جای درستش بین برگ‌های ۱۳۵ و ۱۳۶ و به دنبال برگ ۷۴ است) داده شده است (ص ۱۵۰ چاپ عکسی).

ب	ا	ل	ط	ن	ا	ب	ب
ج	ی	ل	ط	م	د	ن	ب
ل	ح	ل	ر	ع	م	ر	م
ب	ج	ا	ب	ی	ه	خ	م
ز	ط	ع	ک	و	ع	ب	س
ه	ن	د	ل	ا	ک	ا	ن
ک	ر	ه	و	ک	ر	س	ب
ا	ل	ک	ح	ت	و	ب	ن

شکل ۵: صفحهٔ ۱۵۰ چاپ عکسی

۱. از آقای محمد باهر، مدیر واحد تولید مرکز پژوهشی میراث مکتوب، به خاطر ترجمهٔ شعرهای عربی بسیار سپاسگزارم. - م.

جدول زیر (شکل ۶) معادل عددی شماره‌خانه‌ها در جدول پیشین را نشان می‌دهد. دیده می‌شود که این هم یک جواب بسته است.

۴۹	۴۲	۴۰	۵۱	۹	۳۴	۳۶	۱۱
۴۷	۵۲	۵۴	۴۵	۳۹	۱۲	۱۴	۳۳
۴۱	۵۰	۴۸	۴۳	۳۷	۱۰	۸	۳۵
۵۵	۴۴	۴۶	۵۳	۱۵	۳۲	۳۸	۱۳
۶۱	۲۲	۱۶	۶۳	۵	۲۶	۲۸	۷
۱۹	۵۶	۵۸	۲۱	۳۱	۶۴	۲	۲۵
۱۷	۶۲	۶۰	۲۳	۲۹	۶	۴	۲۷
۵۹	۲۰	۱۸	۵۷	۳	۲۴	۳۰	۱

شکل ۶: حرکت متوالی اسب و فیل

بر روی برگ ۷۴ (ص ۱۴۷ چاپ عکسی) جدولی به همین شیوه ثبت شده است برای جواب مسئله گردش اسب وقتی از خانه‌ای مجاور به مرکز صفحه شطرنج شروع کنیم. این جواب بسته مستقل از جواب بسته عرضه شده در شکل ۴ است که در قالب شعرهای اول تا چهارم عرضه شده است.



۳۲	۳۵	۳۰	۲۵	۸	۵	۵۰	۵۵
۲۹	۲۴	۳۳	۳۶	۵۱	۵۶	۷	۴
۳۴	۳۱	۲۶	۹	۶	۴۹	۵۴	۵۷
۲۳	۲۸	۳۷	۱۲	۱	۵۲	۳	۴۸
۳۸	۱۳	۲۲	۲۷	۱۰	۴۷	۵۸	۵۳
۱۹	۱۶	۱۱	۶۴	۶۱	۲	۴۳	۴۶
۱۴	۳۹	۱۸	۲۱	۴۴	۴۱	۶۲	۵۹
۱۷	۲۰	۱۵	۴۰	۶۳	۶۰	۴۵	۴۲

نه	ز	۰	ح	ه	ر	ل	ب
د	ز	ن	و	ن	ا	ل	و
ت	ر	ن	د	م	ط	و	ک
ع	ج	س	ا	ب	ا	ز	ح
ب	خ	م	ز	ی	ک	ک	ب
و	ب	ر	س	ا	د	ب	و
ن	س	ب	ا	م	د	ک	ا
م	ب	م	س	ب	ر	ب	ه

شکل ۸: معادل عددی خانه‌ها در شکل ۷

شکل ۷: گردش اسب (ص ۱۴۷ چاپ عکسی)

در پایان نسخه خطی رساله کتاب الشطرنج ... جدول دیگری ثبت شده که شامل جواب صورت پیچیده‌تر دیگری از مسئله گردش اسب است. در این حالت، از یک گوشه صفحه شطرنج شروع می‌کنیم و متناوباً مهره را طبق حرکت اسب و وزیر جابجا می‌کنیم. در اینجا هم حرکت وزیر برخلاف قاعده امروزی (به هر تعداد خانه افقی، عمودی یا مورب) تنها یک خانه مورب است.

۳۷	۱۴	۱۶	۳۵	۳۳	۱۸	۲۴	۳۱
۱۵	۳۶	۳۴	۱۷	۱۹	۳۲	۳۰	۲۵
۱۳	۳۸	۴۸	۱۱	۲۱	۲۶	۲۸	۲۳
۳۹	۱۲	۱۰	۴۹	۲۷	۲۰	۲۲	۲۹
۹	۴۲	۴۰	۴۷	۶۱	۵۰	۵۲	۶۳
۴۳	۸	۴۶	۴۱	۵۱	۶۰	۶۲	۵۳
۴۵	۶	۴	۵۹	۵۷	۲	۶۴	۵۵
۷	۴۴	۵۸	۵	۳	۵۶	۵۴	۱

شکل ۱۰: معادل عددی خانه‌ها در شکل ۹



شکل ۹: حرکت متناوب اسب و وزیر
(ص ۲۸۴ چاپ عکسی)

در شکل‌های ۵، ۷ و ۹ شماره ترتیب خانه‌هایی که پیموده می‌شود با ارقام ابجد داده شده است (نه بر اساس مختصات حرفی مذکور در شکل ۳).
 عرضه جواب معمای گردش اسب بر صفحه شطرنج در ادبیات سانسکریت هم سابقه دارد. شاعری کشمیری به نام رودرانا جواب مسئله گردش اسب را بر نیمی از صفحه شطرنج (۴x۸) در قرن سوم هجری عرضه کرده است و کاملاً محتمل است که کارش الهام‌بخش شطرنج‌بازان شاعر ایرانی بوده باشد. معادل انگلیسی مسئله گردش اسب knight tour problem است که می‌تواند برای جستجو در منابع چاپی و دیجیتالی به کار رود. عرضه این مطالب توسط ایرانیان در یک متن کهن عربی از دوره اسلامی به لحاظ تاریخچه شاخه‌ای از ریاضیات به نام ترکیبیات^۱ و همچنین نظریه گراف‌ها اهمیت دارد. قرار است تصحیحی از متن عربی و ترجمه فارسی بخشی از مطالب رساله کتاب الشطرنج به همراه توضیحات آن به عنوان رساله کارشناسی ارشد در پژوهشکده تاریخ علم دانشگاه تهران فراهم شود. بر روی برگ ۷۵ نسخه خطی رساله (ص ۱۴۹ چاپ عکسی) جدولی ثبت شده است که تا کنون مؤفق به رمزگشایی آن نشده‌ایم و خواننده چالشگر را به کشف آن دعوت می‌کنیم (بنگرید به صفحه بعد).



س	ب					ب	ب
س	ب	ب			ب	ب	ب
	ب	ب			ب	ب	ب
			ب	ب			
			ب	ب			
	ب	ب			ب	ب	ب
ب	ب	ب			ب	ب	ب
ب	ب				ب	ب	ب

شکل ۱۱: جدول ص ۱۴۹ چاپ عکسی که هنوز رمزگشایی نشده است.